Recupero del 29/9/07 di An. Mat. II (primi cinque crediti) Ing. Elett. A.A.06/07

• Chi recupera solo la SECONDA PARTE di analisi II (primi 5 crediti) svolga l'esercizio **2)** ed ha 80 minuti di tempo. I voti sono in `macchina da scrivere`. Qui rientrano quelli che hanno superato il primo esonero durante l'anno

• Chi recupera tutto il programma di analisi II (primi 5 crediti) svolga tutti gli esercizi ed ha 150 minuti di tempo. I voti sono quelli scritti in stile **grassetto**

• Chi recupera analisi II (10 CREDITI) svolga:
La **Prima domanda** dell'esercizio **1)** e la **Terza domanda** dell'esercizio **2)**
la **prima, seconda** e **quinta** domanda dell'esercizio 1) del compito di analisi II (secondi 5 crediti)
le **prime due domande** dell'esercizio 2) del compito di analisi II (secondi 5 crediti)
Si hanno 210 minuti di tempo. I voti sono *scritti in italico*

Si risponda alle domande di seguito al testo. Lo svolgimento per esteso dei calcoli (sempre in bella) va allegato al compito. **Comporta una penalizzazione non scrivere nelle zone indicati i calcoli richiesti ma riportarli solo nella bella o sulla brutta che comunque va consegnata solo se strettamente necessario**

1) Si considerino le superfici S_1 e S_2 definite rispettivamente da $z = \sqrt{3} - \sqrt{3x^2 + 3y^2}$, $z \geq 0$ e $z^2 + x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$.

Prima domanda (5) (*5*) Si calcoli il volume dell'insieme dei punti, detto V_1, che stanno dentro S_1 e fuori di S_2 e quello dei punti detto V_2, che stanno dentro S_2 e fuori di S_1.

• Si scriva qui di seguito l'integrale che rappresenta il calcolo del volume di V_1 e poi di V_2 **badando bene che sia leggibile**. Soluzioni illeggibili verranno penalizzate.

La base del cono è la circonferenza $x^2+y^2=1$. Salendo verso l'alto il cono incontra la sfera lungo una circonferenza su di un piano orizzontale la cui ordinata è data dalla soluzione dell'equazione (si assuma come variabile la quantità $\sqrt{x^2+y^2} = r$) $1 - r^2 = 3(1-r)^2$ e quindi $r = 1$ (già lo sapevamo) e $r = \frac{1}{2}$. $r = \frac{1}{2}$ corrisponde a $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
V_1 è dato dall'insieme $\{x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, \quad \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{3} - \sqrt{3x^2 + 3y^2}\}$ e $V_2 = \{\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1, \quad \sqrt{3} - \sqrt{3x^2 + 3y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$.
Introducendo coordinate polari nel piano si ha

$$V_1 = \int_0^{1/2} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \big(\sqrt{3} - \sqrt{3}\rho - \sqrt{1-\rho^2}\big) = \frac{5\sqrt{3}-8}{12}\pi$$

$$V_2 = \int_{1/2}^{1} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \big(\sqrt{1-\rho^2} - \sqrt{3} + \sqrt{3}\rho\big) = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

Seconda domanda (5) Si consideri il volume V_2. Dato il campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = \sqrt{x^2+y^2}(x\underline{i} + y\underline{j} + \sqrt{x^2+y^2})\underline{k}$ si calcoli il flusso di $\underline{F}(\underline{x})$ attraverso la superficie esterna contornante V_2.
Suggerimento: $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx$ si integra per parti e per integrare $\int \sqrt{1-x^2}dx$ si effettui la sostituzione $x = \sin t$.
Si scriva qui di seguito l'integrale che rappresenta il calcolo e poi il risultato nello spazio sottostante **badando bene che sia leggibile**. Soluzioni illeggibili verranno penalizzate.

In coordinate cartesiano il vettore esterno alla circonferenza è $\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right) \stackrel{\rm def}{=} \underline{v}$

e l'integrale che cerchiamo è $\int\int_S (\underline{F}(\underline{x}), \frac{v}{\|\underline{v}\|})d\sigma = \int\int_S (\underline{F}(\underline{x}), \frac{v}{\|\underline{v}\|})\|\underline{v}\|dxdy$ e quindi
$\int_{1/2}^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\Big(\rho^2 - \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}}\Big) = \frac{15-7\sqrt{3}}{32}\pi - \frac{\pi}{4}$

Terza domanda (**5**) Si considerino le due curve, percorse in senso antiorario, il cui sostegno è dato rispettivamente da: 1) la circonferenza di centro $(0,0,0)$, di raggio $r=1$ ed i cui punti hanno tutti ordinata $z=0$ 2) la circonferenza di centro $(0,0,0)$, di raggio $r=\frac{1}{2}$ ed i cui punti hanno tutti ordinata $z=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Sia ω la forma differenziale $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdz-zdx}{x^2+z^2} + \frac{zdy-ydz}{z^2+y^2}$. Si calcoli $\int_{\gamma_1}\omega + \int_{\gamma_2}\omega$ dove γ_1 e γ_2 sono le curve descritte prima.

• Si scriva la soluzione nello spazio sottostante **badando bene che sia leggibile**. Soluzioni illeggibili verranno penalizzate.

$\int_{\gamma_1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} + \int_{\gamma_2}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 4\pi$. L'integrale delle altre dà zero.

2)

Prima domanda (**5**) (10) Sia $\omega \neq ka$ per ogni intero positivo k. Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = \cos x\cos(\omega t) & 0<x<\pi \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, & u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

Si scriva la soluzione nello spazio sottostante **badando bene che sia leggibile**. Soluzioni illeggibili verranno penalizzate. Sui fogli allegati si riporti lo svolgimento.

Si prolunga in modo dispari la funzione $\cos x$ a $-\pi<x<0$ dimodoché i coefficienti di Fourier c_k della funzione $\cos x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin kx$ sono dati da $c_1=0$, $c_k = \frac{2k(1+(-)^k)}{\pi(k^2-1)}$ se k è dispari diversi da 1. Ne segue che dalla formula $\sum_{k=1}^{+\infty}\sin kx(u_k''+a^2k^2u_k) = \cos x\cos(\omega t)$ si ha $u_k''+a^2k^2u_k=0$ se k è dispari diverso , $u_k''+a^2k^2u_k = \frac{4k}{\pi(k^2-1)}\cos(\omega t)$ se k è pari. La soluzione è $u_k(t) = A_k\cos(akt)+B_k\sin(akt)+C_k\cos(\omega t)$ dove $C_k=0$ se k è dispari, e $C_k = \frac{4k}{\pi(k^2-1)}\frac{1}{a^2k^2-\omega^2}$ se k è pari. Si noti l'importanza del fatto che $\omega\neq ka$. Per soddisfare le condizioni inziali basta che $A_k=-C_k$ e $B_k=0$

La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{8k}{\pi(4k^2-1)}\frac{1}{4a^2k^2-\omega^2}(\cos(\omega t)-\cos(2kat))\sin(2kx)$

Seconda domanda (**5**) (10) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = \cos x\cos(at) & 0<x<\pi \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, & u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

Si scriva la soluzione nello spazio sottostante **badando bene che sia leggibile**. Soluzioni illeggibili verranno penalizzate.
Avvertimento: Si faccia attenzione alla risonanza

Tutto è uguale a prima solo che al posto di ω c'è a. La soluzione è

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{8k}{\pi(4k^2-1)}\frac{1}{4a^2k^2-a^2}(\cos(at)-\cos(2kat))\sin(2kx)$$

Terza domanda (**5**) (10) (*10*) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\cos x(\cos(at)+\cos(2at)) \quad 0<x<\pi \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

Si scriva la soluzione nello spazio sottostante **badando bene che sia leggibile**. Soluzioni illeggibili verranno penalizzate.
Avvertimento: Si faccia attenzione alla risonanza

Si prolunga in modo dispari la funzione $\cos x$ a $-\pi<x<0$ dimodoché i coefficienti di Fourier c_k della funzione $\cos x=\sum_{k=1}^{+\infty}c_k\sin kx$ sono dati da $c_1=0$, $c_k=\dfrac{2k(1+(-)^k)}{\pi(k^2-1)}$ con $k\neq 1$. Ne segue che dalla formula $\sum_{k=1}^{+\infty}\sin kx(u_k''+a^2k^2u_k)=\cos x(\cos(at)+\cos(2at))$ si ha $u_k''+a^2k^2u_k=0$ se k è dispari, $u_2''+4a^2u_2=\dfrac{8}{3\pi}(\cos(at)+\cos(2at))$, $u_k''+a^2k^2u_k=\dfrac{4k}{\pi(k^2-1)}(\cos(at)+\cos(2at))$ se k è pari diverso da 2. Le soluzioni sono:
1) k pari diverso da 2.
$u_k(t)=A_k\cos(akt)+B_k\sin(akt)+\dfrac{4k}{a^2\pi(k^2-1)^2}\cos(at)+\dfrac{4k}{a^2\pi(k^2-1)(k^2-4)}\cos(2at)$ e con la condizione iniziale si ha $A_k=\dfrac{-4k}{a^2\pi(k^2-1)^2}+\dfrac{-4k}{a^2\pi(k^2-1)(k^2-4)}$, $B_k=0$
2) $k=2$.
$u_2(t)=A_2\cos(2at)+B_2\sin(2at)+\dfrac{8}{9\pi a^2}\cos(at)+\dfrac{2}{3\pi a}t\sin(2at)$ e con la condizione iniziale si ha $A_2=-\dfrac{8}{9\pi a^2}$, $B_2=0$. Per la soluzione particolare di questa equazione si deve cercare una soluzione del tipo $v(x,t)=\alpha\cos(at)+\gamma t\sin(2at)$. $v''+4a^2v=4\alpha\gamma\cos(2at)+\cos(at)3a^2\alpha$ da cui si ottiene $\gamma=2/(3a\pi)$ e $\alpha=8/(9a^2\pi)$. La soluzione finale presenta anche $\cos(2at)$.

Se si fosse provata una soluzione del tipo $v(x,t)=\alpha\cos(at)+\beta\cos(2at)+\gamma t\sin(2at)$ non si sarebbe avuta alcuna relazione per β e ciò sembrerebbe una contraddizione. Il punto è che $\cos(2at)$ compare già nella soluzione della equazione omogenea associata ed infatti la si può omettere nella ricerca della soluzione particolare.
3) k dispari.
$u_k(t)=A_k\cos(akt)+B_k\sin(akt)$ e con la condizione iniziale si ha $A_k=B_k=0$